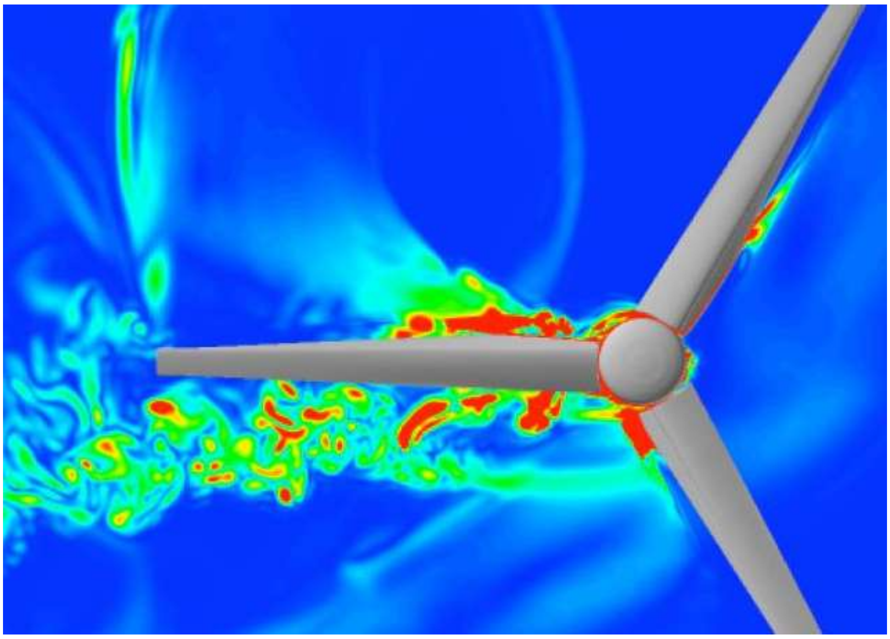


كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية الثانية
قسم القوى الميكانيكية

ميكانيك السوائل 2

الحركة العامة للسوائل

الدكتور المهندس
سعيد شقير

محتوى العرض

- ❖ مقدمة
- ❖ مفهوم التشوه والدوران
- ❖ شرط الخلو من الدوران

مقدمة

- الحركة العامة لجسم صلب " نقاطه المختلفة تتحرك على خطوط مسار متباينة" يمكن إرجاعها الى:

✓ **حركة انسحابية (انتقالية) Translational motion** تقوم بها نقطة مميزة (قطب) مثبتة على الجسم (مركز الثقل مثلا)
✓ **وحركة دورانية Rotational motion** للجسم الصلب كله حول محور دوران آني, أي يتغير عادة مع الزمن , يمر من تلك النقطة المميزة.

- حيث أن المسافة بين أية نقطتين من الجسم بفضل صلادته تبقى ثابتة فتتحدد السرعة V لاية نقطة B منه بالعلاقة الشعاعية :

$$V = V_S + \omega \times r$$

حيث V_S, سرعة القطب S و ω شعاع السرعة الزاوية المحمول على محور الدوران الآني $r = \overrightarrow{SB}$ نصف القطر الشعاعي.

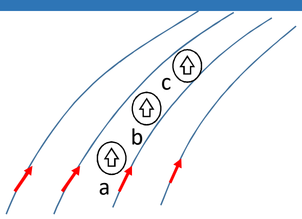
- من تحليل الحركة العامة للسوائل نجد أن دراستها أعقد بكثير من دراسة حركة الجسم الصلب , خاصة لأن جزيئات السائل لا تستطيع المحافظة على شكلها.
- إن دراسة الحركة العامة لسائل تتوضح من خلال العمليات الأولية Elemetrary Processes لحركة جزيء سائلي متناهي الصغر.
- وضع **هلمهولتس** أسس معالجتها الفيزيائية والرياضية في بحثه المشهور عن الحركات الإعصارية, الذي نشره عام 1858 وتوصل فيه الى صياغة المعادلة العامة لحركة الجزيئات السائلية.

مفهوم التشوه والدوران

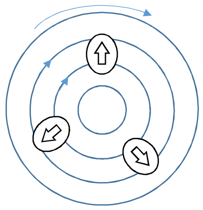
- كل جزيء سائلي من حقل الجريان يستطيع ان يقوم في الحالة العامة بحركة انسحابية بالاضافة لحركة دورانية.
- كلمة **"دوران"** تعبر عن السرعة الزاوية للجزيء, التي يمكن الحصول عليها من أجل فترة زمنية قصيرة, إذا تصورنا ان الجزيء قد "تصلب" بدون تشوه *Deformation* .
- **يمكن التحقق من وجود أو عدم وجود الدوران بتجربة بسيطة:**

- نضع على السطح الحر للجريان قطعة صغيرة من الفلين (عوضا عن الجزيء" المتصلب"!) أشر عليها باتجاه ما, ونتركها تسبح مع جزيئات السائل وفق خط تيار معين.
- اذا بقي اتجاه السهم أثناء انتقال قطعة الفلين موازيا لنفسه, وبالتالي *a//b//c......*, فتكون جزيئات السائل على طول خط التيار المعتبر لا تقوم بحركة دورانية

- أما إذا وضعنا قطعة الفلين على السطح الخارجي لسائل يدور في إناء إسطواني بسرعة زاوية ثابتة,
- فتلاحظ أن اتجاه السهم لا يأخذ وضعيات متوازية, بل يبقى قطرياً, وبالتالي تقوم جزيئات السائل بالنسبة لكل خط تيار بحركة دورانية.

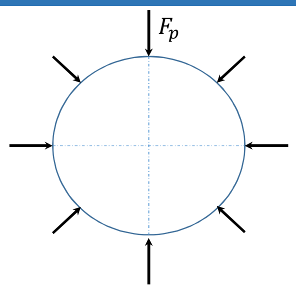


جريان لا دوراني طالما بقي a||b||c

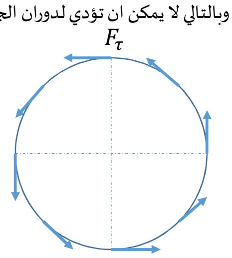

جريان دوراني طالما بقي a || b || c

القوى السطحية على جزيئة اسطوانية دائرية

- إن الجزيء السائلي لا يستطيع الدوران إلا إذا خضع لتأثير عزم دوراني.
- لكي نتصور منشأ هذا العزم نقطع من داخل سائل جزئيا نفرضه للبساطة بشكل اسطوانة دائرية صغيرة.
- إذا كان السائل عديم اللزوجة فإن عزوم قوى الضغط الصرف F_p المؤثرة ناظمياً على السطح تكون معدومة
- وبالتالي لا يمكن ان تؤدي لدوران الجزيء مطلقاً.



الجزيئة لا تستطيع الدوران إذا اثرت قوى ناظمية فقط



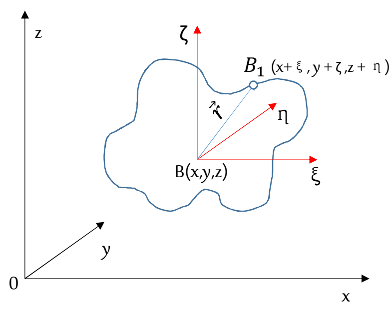
تتولد حركة دورانية فقط عندما تؤثر قوى قص مماسية

- لا يتولد عزم دوراني إلا إذا اثرت على الجزيء قوى قص مماسية F_t .
- هذه القوى تنشأ, كما نعلم, نتيجة للزوجة السائل عندما تتعرض جزيئاته للتشوه.
- ومنه ينتج أن وجود الدوران مرتبط بوجود التشوه.

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية الثانية
قسم الميكانيك العام

استخراج المعادلة العامة لحركة السوائل

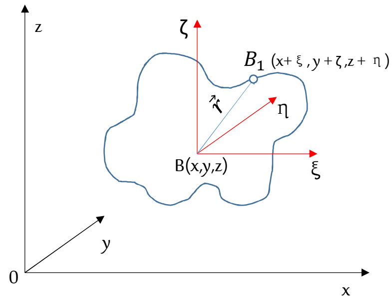
- لقد كان هلمهولتس أول من برهن أن دوران جزيئات السائل المثالي يختلف جزريا عن دوران جزيئات السائل الحقيقي, أي في حالة جريان مع فواقد.
- في الواقع فإن حركة السوائل يمكن تقسيمها بصورة عامة الى فصيلتين أساسيتين تختلفان عن بعضهما من الناحية الحركية والفيزيائية, وبالتالي من حيث المعالجة الرياضية:
- الأولى هي الحركة الدورانية وتمثلها بصورة عامة جريانات السوائل الحقيقية,
- والثانية هي الحركة اللادورانية *Irrotational motion* وتمثلها عامة جريانات السوائل المثالية.



استخراج المعادلة العامة لحركة جزيء حجمي

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية الثانية
قسم الميكانيك العام

استخراج المعادلة العامة لحركة السوائل



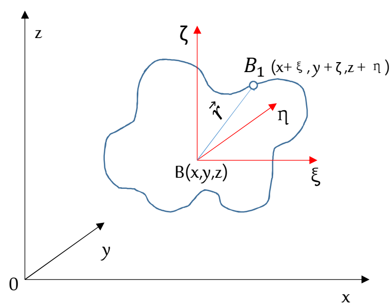
استخراج المعادلة العامة لحركة جزيء حجمي

- نعتبر في لحظة معينة t حركة جزيء حجمي متناهي الصغر مقتطع من داخل حقل جريان مستمر
- لتكن $B(x,y,z)$ نقطة ما داخل الجزيء محددة في مجموعة الإحداثيات الثابتة$z,y,x,0$:
- لتكن $u=u(x,y,z)$ $v=v(x,y,z)$ $w=w(x,y,z)$ مركبات شعاع السرعة$\boldsymbol{V}$ في هذه النقطة.
- نعتبر نقطة ما $B_1(x+\xi, y+\xi, z+\xi)$ واقعة على سطح الجزيء, حيث ζ,η,ξ مركبات شعاع نصف القطر النسبي $\mathbf{r}=\overrightarrow{BB_1}$ في مجموعة إحداثيات مثبتة على الجزيء.
- إن مركبات شعاع السرعة $\boldsymbol{V}_1$ للنقطة B_1 تنتج بالشكل التالي :

$$\begin{cases} u_1 = u(x+\xi, y+\eta, z+\zeta) \approx u + \dfrac{\partial u}{\partial x}\xi + \dfrac{\partial u}{\partial y}\eta + \dfrac{\partial u}{\partial z}\zeta \\ v_1 = v(x+\xi, y+\eta, z+\zeta) \approx v + \dfrac{\partial v}{\partial x}\xi + \dfrac{\partial v}{\partial y}\eta + \dfrac{\partial v}{\partial z}\zeta \\ w_1 = w(x+\xi, y+\eta, z+\zeta) \approx w + \dfrac{\partial w}{\partial x}\xi + \dfrac{\partial w}{\partial y}\eta + \dfrac{\partial w}{\partial z}\zeta \end{cases}$$

وذلك بعد نشرها بشكل سلسلة **تايلور** وإهمال كافة حدود المراتب العليا الحاوية على ζ,η,ξ

استخراج المعادلة العامة لحركة السوائل



استخراج المعادلة العامة لحركة جزيء حجمي

- نضيف الى الطرف الأيمن للمعادلة الأولى المقادير $\pm\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}\eta$ و $\pm\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\zeta$ ونرتب الحدود فينتج بعد إصلاح بسيط:

$$u_1 = u + \frac{\partial u}{\partial x}\xi + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\eta + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\zeta + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\zeta - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\eta$$

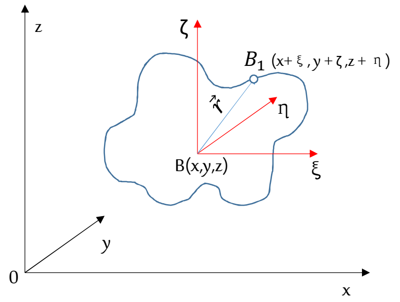
$$v_1 = v + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\xi + \frac{\partial v}{\partial y}\eta + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\zeta + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\xi - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\zeta$$

$$w_1 = w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\xi + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\eta + \frac{\partial w}{\partial z}\zeta + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\eta - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\xi$$

- لاختصار الكتابة نفترض:

$$\begin{cases} \omega_x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z}\right);\ \Theta_x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right);\ \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \omega_y = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\right);\ \Theta_y = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right);\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \omega_z = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right);\ \Theta_z = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right);\ \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{cases}$$

استخراج المعادلة العامة لحركة السوائل



استخراج المعادلة العامة لحركة جزيء حجمي

- نستخدم التابع المساعد من الدرجة الثانية:

$$\emptyset_D = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_x\xi^2 + \varepsilon_y\eta^2 + \varepsilon_z\zeta^2 + 2\Theta_x\eta\zeta + 2\Theta_y\zeta\xi + 2\Theta_z\xi\eta\right)$$

الذي تحقق مشتقاته الجزئية العلاقات التالية:

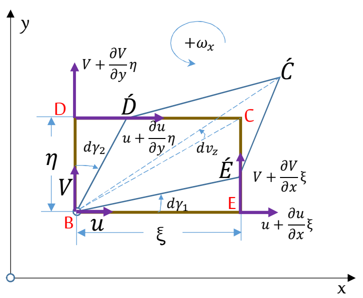
$$\begin{cases} \dfrac{\partial\emptyset_D}{\partial\xi} = \varepsilon_x\xi + \Theta_y\zeta + \Theta_z\eta \\ \dfrac{\partial\emptyset_D}{\partial\eta} = \varepsilon_y\eta + \Theta_x\zeta + \Theta_z\xi \\ \dfrac{\partial\emptyset_D}{\partial\zeta} = \varepsilon_x\zeta + \Theta_y\eta + \Theta_z\xi \end{cases}$$

- بذلك تأخذ المعادلات السابقة الشكل التالي :

$$\begin{cases} u_1 = u + (\omega_y\zeta - \omega_z\eta) + \dfrac{\partial\emptyset_D}{\partial\xi} = u + u_R + u_D \\ v_1 = v + (\omega_z\xi - \omega_x\zeta) + \dfrac{\partial\emptyset_D}{\partial\eta} = v + v_R + v_D \\ w_1 = w + (\omega_x\eta - \omega_y\xi) + \dfrac{\partial\emptyset_D}{\partial\zeta} = w + w_R + w_D \end{cases}$$

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية الثانية
قسم الميكانيك العام

استخراج المعادلة العامة لحركة السوائل



تشوة جزيء سطحي بشكل مستطيل لتحديد مفهوم سرعة التشوه والدوران

- لتبسيط شرح المضمون الفيزيائي لحدود هذه المعادلات نعتبر حركة جزيء حجمي بسيط نتصوره في اللحظة المعتبرة t بشكل متوازي مستطيلات متناهي الصغر.
- لتبسيط المسألة أكثر ندرس حركة هذا الجزيء الموازية للمستوي xy , أي أننا نعتبر من جريان مستوٍ موازٍ ل yx حركة جزيء سطحي بشكل مستطيل $ECDB$ أطوال أضلاعه ξ , η
- لتكن v .u مركبات السرعة في النقطة $B(x,y)$.
- تكون مركبات السرعة في النقطة $E(x+\xi,v)$ هي : $u+\frac{\partial u}{\partial x}\xi$, $v+\frac{\partial v}{\partial x}\xi$
- في النقطة النقطة $D(x,y+\eta)$ هي : $u+\frac{\partial u}{\partial y}\eta$, $v+\frac{\partial v}{\partial y}\eta$.
- حيث أنه في الحالة المستوية $z=\zeta=w=0$ فيكون:

$\omega_x=\omega_y=\varepsilon_z=\Theta_x=\Theta_y=0$.

بالتالي تنتج مركبات السرعة في $C(x+\xi,y+\eta)$ بالشكل:

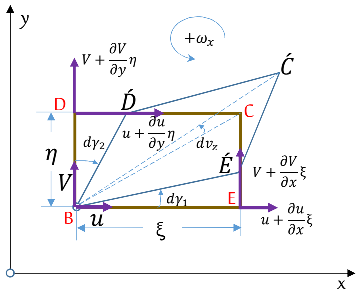
$$\begin{cases} u_C = u - \omega_z\eta + \Theta_z\eta + \varepsilon_x\xi \\ v_C = v + \omega_z\xi + \Theta_z\xi + \varepsilon_y\eta \end{cases}$$

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية الثانية
قسم الميكانيك العام

استخراج المعادلة العامة لحركة السوائل

- اذا فرضنا $\omega_z = \Theta_z = \varepsilon_y = \varepsilon_x = 0$ فيبدو جليا v, u تمثلان مركبتي السرعة الانسحابية للجزيء السطحي (أو القطب منه B) عندما يتحرك **حركة انسحابية متوازية** وكأنه جسم مطلق الصلابة.
- لكن الجزيء سيتعرض أثناء حركته, كأي جزيء صلب مرن , لتشوه زاوي لزواياه القائمة ولتشوه طولي لأضلاعه, بنفس الطريقة المعروفة في **نظرية المرونة** *Theory of Elasticity*.
- إذا اعتبرنا الانزياح النسبي للنقاط E, C, D تجاه النقطة B فإن المستطيل سيأخذ في اللحظة $t+dt$ شكل متوازي أضلاع $\acute{E}\,\acute{C}\acute{D}B$.
- بما ان السرعة تساوي المسافة (الإنزياح) في واحدة الزمن , والسرعة الزاوية تكافئ زاوية الدوران في واحدة الزمن, والزاوية الصغيرة تساوي ظلها تقريبا , حسب الشكل التغير الزاوي في واحدة الزمن الناتج عن دوران الضلعين القائمين EBوDB

$$\omega_1 = \frac{\partial\gamma_1}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad [s^{-1}];\ \omega_2 = \frac{\partial\gamma_2}{dt} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad [s^{-1}]$$



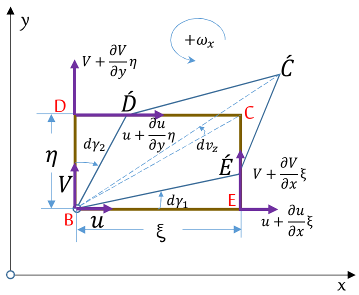
تشوة جزيء سطحي بشكل مستطيل لتحديد مفهوم سرعة التشوة والدوران

استخراج المعادلة العامة لحركة السوائل

- نأخذ كمقياس للدوران الوسطي *Avarage rotation* للجزيء السطحي ككل دوران القطرين,
- نعتبر ان قطر المستطيل يدور نصف زاوية الدوران التي يدورها ضلعاه القائم وان اتجاه الدوران الموجب هو بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة , فتكون:

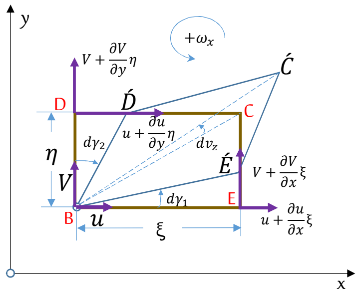
$$\omega_z = \frac{\partial\upsilon_z}{dt} = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

- تمثل **السرعة الزاوية** التي يدور بها الجزيء السطحي " المتصلب" حول محور آني يمر من النقطة B ويوازي المحور z.
- تكون بالتالي $+\omega_z\xi$ و$-\omega_z\eta$ في العلاقة (7.10) تمثلان السرعة المحيطية للحركة الدورانية للجزيء السطحي في اتجاه المحورين x و y.



تشوة جزيء سطحي بشكل مستطيل لتحديد مفهوم سرعة التشوة والدوران

استخراج المعادلة العامة لحركة السوائل



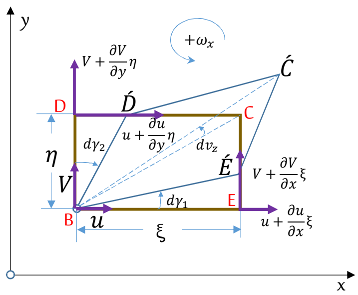
تشوة جزيء سطحي بشكل مستطيل لتحديد مفهوم سرعة التشوة والدوران

- من جهة أخري فإن التغير الزاوي الكلي في واحدة الزمن الذي يطرأ على الزاوية القائمة *EBD* نجد:

$$\frac{\partial \gamma_1}{dt}+\frac{\partial \gamma_2}{dt}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=2\Theta_z \quad [s^{-1}]$$

- وعليه فإن Θ_z تعبر عن السرعة الزاوية التي يتم بها تغير الزاوية القائمة لضلعي المستطيل في النقطة *B*.
- بينما تعبر $\Theta_z\eta$ و $\Theta_z\xi$ عن **سرعة التشوه الزاوي** *Angular deformation* بال *[m/s]* في الاتجاهين *x* و*y*.
- أخيرا فإن الحدين الباقيين $\varepsilon_x\xi=\frac{\partial u}{\partial x}\xi$ و. $\varepsilon_y\eta=\frac{\partial v}{\partial y}\eta$ يمثلان بالأصل تغير السرعة [m/s] على طول المسافتين ξ و η ، فهما يعبران إذن عن سرعة التشوه الطولي *Linear deformation* لضلعي المستطيل *EB* و *DB* في الاتجاهين *x* و*y*.

استخراج المعادلة العامة لحركة السوائل



تشوة جزيء سطحي بشكل مستطيل لتحديد مفهوم سرعة التشوة والدوران

- إن دراسة مماثلة لحركة جزيء سطحي مستطيل في المستويين *zx* و*zy* تقودنا الى توضيح المضمون الفيزيائي لبقية الحدود المعرفة في المعادلة السابقة.
- بذلك نخلص في حالة ثلاثية المقاس الى نتيجة ان القيم ε_x , ε_y, ε_z تعبر عن التشوه الطولي, والقيم Θ_x , Θ_y , Θ_z عن التشوه الزاوي,
- بينما تمثل ω_x , ω_y, ω_z مركبات شعاع السرعة الزاوية ω أو كما يسمى أيضا شعاع الاعصار Vortex vector, الذي يكون محمولا على محور الدوران الآني الذي يدور حوله الجزيء الحجمي المعتبر .
- فاذا عدنا الى العلاقة (7.9) تتضح لدينا النتيجة الهامة التالية:

إن الحركة العامة لجزيء حجمي سائل تتألف من حركة انتقالية متوازية لقطب منه بسرعة إنسحابية $\boldsymbol{V}(u,v,w)$, وحركة دورانية حول محور آني يمر من هذا القطب ذات سرعة محيطية $\boldsymbol{V}_R(u_R,v_R,w_R)$ تساوي جداء السرعة الزاوية $\boldsymbol{\omega}(\omega_x,\omega_y,\omega_z)$ في نصف القطر النسبي $\boldsymbol{r}(\xi,\eta,\zeta)$, وحركة تشوهية يعبر عنها تابع التشوه $\emptyset_D(\xi,\eta,\zeta)$ سرعتها $\boldsymbol{V}_D(u_D,v_D,w_D)$

استخراج المعادلة العامة لحركة السوائل

- باستخدام علاقات التحليل الشعاعي تأخذ المعادلات السابقة الصيغة الشعاعية التالية:

$$\boldsymbol{V}_1 = \mathbf{V} + \boldsymbol{V}_R + \boldsymbol{V}_D = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} + \mathbf{grad}\ \emptyset_D$$

- التي تختلف عن العلاقة السابقة بالحد المعبر عن سرعة التشوه
- لذلك يطلق أحيانا على حركة السوائل اسم حركة التشوه :

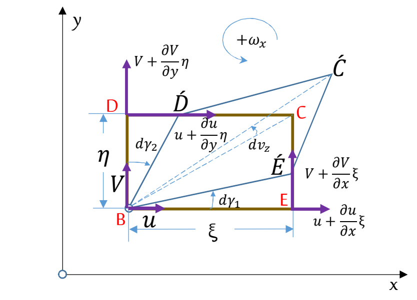
$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{i}\omega_x + \boldsymbol{j}\omega_y + \boldsymbol{k}\omega_z = \frac{1}{2}\nabla \times \boldsymbol{V} = \frac{1}{2} rot\ \boldsymbol{V}$$

- حيث الشعاع الرمزي:

$$\nabla = \boldsymbol{i}\ \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\ \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\ \frac{\partial}{\partial z}$$

- يمثل معامل "نابلا", و $rot\ \boldsymbol{V}$ يمثل شعاعا يطلق عليه شعاع دوار السرعة.
- عليه فإن العلاقة السابقة تربط بين شعاع السرعة وشعاع الإعصار الذي تبلغ قيمته:

$$|\boldsymbol{\omega}| = \sqrt{\omega_x{}^2 + \omega_y{}^2 + \omega_z{}^2}$$



تشوة جزيء سطحي بشكل مستطيل لتحديد مفهوم سرعة التشوه والدوران

شرط الخلو من الدوران

- نعتبر جريانا ثلاثي المقاس محدد بحقل السرعة $\boldsymbol{V}(u,v,z)$ إن حركة السائل في كامل حقل الجريان أو منطقة معينة منه, توصف بأنها **حركة دوران** أو **حركة إعصارية** عندما توجد لشعاع السرعة الزاوية قيمة محددة تختلف عن الصفر. وبالتالي يجب أن تكون :

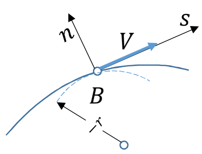
$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} rot\ \boldsymbol{V} \neq 0 \quad => \quad \omega_x \neq 0, \omega_y \neq 0, \omega_z \neq 0,$$

- وتكون حركة السائل **لادورانية** أو **لا إعصارية** (خالية من الأعاصير) عندما ينعدم شعاع السرعة الزاوية , وبالتالي تتحقق العلاقة:

$$\boldsymbol{\omega} = 0 \quad => \quad \omega_x = \omega_y = \omega_z = 0 \quad => \ rot\ \boldsymbol{V} = 0$$

- التي يطلق عليها حسب هلمهولتس **شرط الخلو من الدوران** ***Condition irrotationality***.
- فاذا عبرنا عن مركبات شعاع السرعة الزاوية بمركبات شعاع السرعة ينتج :

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$



استخراج شرط الخلو من الدوران بالنسبة لخط التيار

هذه المعادلات تمثل بموجب قانون معروف في التحليل الشعاعي ونظرية **الحقل** الشروط اللازمة والكافية لكي يكون التفاضل الثلاثي الحدود $udx + vdy + wdz$ تفاضلا تاما لتابع سلمي $\Phi(u,v,z)$ مستمر وقابل للاشتقاق في كامل المجال المعتبر .

شرط الخلو من الدوران

- وهذا يعني أن :

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}dz = udx + vdy + wdz$$

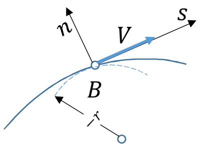
- وبالتالي فان مركبات السرعة تمثل المشتقات الجزئية لهذا التابع بالنسبة للاحداثيات المناسبة , أي :

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad => V_s = \frac{\partial \Phi}{\partial s}$$

- أو بالصيغة الشعاعية :

$$\boldsymbol{V} = \mathbf{grad}\ \Phi$$

- بسهولة يمكن التأكد أن العلاقة تحقق بالتطابق .
- يطلق على التابع Φ اسم كمون السرعة *Velocity potential* تيمنا بكمون حقل القوى الحجمية.
- تسمى الجريانات التي تملك مثل هذا الكمون الجريانات الكمونية أو اللادورانية , وتكون عادة مثالية أي عديمة الاحتكاك



استخراج شرط الخلو من الدوران بالنسبة لخط التيار

شرط الخلو من الدوران

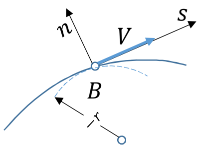
- بالرغم من أن السرعة $\boldsymbol{V} = f(x,y,z)$ يمكن ان تتغير اعتباطيا من نقطة الى أخرى, فإنه يوجد في حالة الجريانات المثالية تابع سلمي يطلق عليه كمون السرعة ويتغير فقط على طول خطوط التيار s المماثلة لخطوط القوة. ويخترق شعاع التدرج لهذا التابع المساوي لشعاع السرعة سطوح كمون السرعة الثابت, التي تمثل عادة سطوحا فراغية مفتولة, في كل نقطة يمر منها خط تيار بشكل عمودي دائماً.

- في حالة الجريانات المستقرة يكون كمون السرعة تابعا مكانيا صرفا $\Phi = f(x,y,z)$, ويكون تابعا للزمان والمكان في حالة الجريانات غير المستقرة $\Phi = f(x,y,z,t)$.
- فإذا ادخلنا العلاقة السابقة في معادلة الاستمرار للجريانات المستقرة غير القابلة للإنضغاط (6.20) تأخذ الصيغة التالية :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \equiv \Delta\Phi = 0$$

أو بالشكل الشعاعي

$$\Delta\Phi = div\ \mathbf{grad}\ \Phi = 0$$



استخراج شرط الخلو من الدوران بالنسبة لخط التيار

شرط الخلو من الدوران

- يعرف

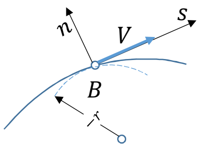
$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- باسم معامل لابلاس *Laplace operator* ,
- لذلك تسمى معادلة الاستمرار للجريانات الكمونية باسم معادلة لابلاس .
- ينتج منها ان كل تابع Φ يحقق هذه العادلة يمثل كمون سرعة لجريان كموني , فهي إذن معادلة تحديد هذا التابع .
- في حالة الجريانات ثنائية البعد ينحصر شرط الدوران بأن تكون مركبة واحدة فقط من مركبات شعاع السرعة الزاوية مختلفة عن الصفر. وبالتالي يكون في حالة جريان مواز للمستوي x,y:

$$\omega_x=\omega_y=0;\ \omega_z\neq 0$$

- **يتحقق شرط الخلو من الدوران عندما** :

$$\omega_z=0\ \ =>\ \ \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$$



استخراج شرط الخلو من الدوران بالنسبة لخط التيار

شرط الخلو من الدوران

- نعتبر من هذا الجريان المستوي خطاً للتيار , فتكون معادلته التفاضلية

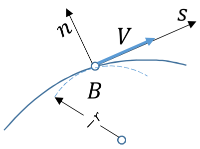
$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{v}{u}$$

- كون المشتق الثاني وندخل علاقة نصف قطر الانحناء r لخط التيار فينتج :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{v}{u}\right)=\frac{1}{u}\frac{dv}{dx}-\frac{v}{u^2}\frac{du}{dx}=-\frac{\left(1+(\frac{dy}{dx})^2\right)^{3/2}}{r}$$

- نختار محاور الاحداثيات بحيث أنه في النقطة B مثلا في الشكل التالي يأخذ المحور x إتجاه المماس s والمحور y إتجاه الناظم n على خط التيار فيكون عندئذ:

$$\frac{dy}{dx}=0;\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{r};v=0;u=V$$



استخراج شرط الخلو من الدوران بالنسبة لخط التيار

شرط الخلو من الدوران

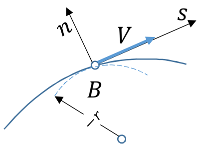
- وينتج

$$\frac{dv}{dx}=\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{V}{r}$$

- يصبح شرط الخلو من الدوران لخط التيار المعتبر

$$\boxed{\frac{V}{r}+\frac{\partial V}{\partial n}=0}$$

- هذه العلاقة لها أهمية كبيرة بالنسبة لدراسة الجريانات المستوية المثالية في جملة تدور نفسها حول المحور z بسرعة زاوية ثابتة, كما هو الحال عند دراسة الجريان داخل الدولاب الدائر لآلة الجريان , عندما يتغير البعد المحوري للجزيئات الصغيرة.
- فإذا كان الجريان الموجه للدولاب الدائر مستقرا وكمونيا , فإن الجريان داخل الادولاب الدائر يكون غير مستقر , اذا راقبنا حركته من نقطة مطلقة ساكنة خارج الدولاب الدائر .



استخراج شرط الخلو من الدوران بالنسبة لخط التيار

شرط الخلو من الدوران

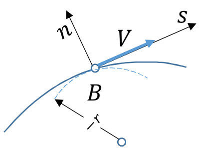
- تكون هذه الحركة مستقرة إذا راقبنا من جملة نسبية مثبتة على الدولاب الدائر . فإذا فرضنا V السرعة المطلقة , W السرعة النسبية, U السرعة المحيطية فتكون:

$$\mathbf{V}=\mathbf{W}+\mathbf{U}$$

- وبإدخالها في المعادلة السابقة مع مراعاة أن $U=-r\omega$, $\frac{\partial U}{\partial n}\equiv\frac{\partial U}{\partial r}$ ينتج:

$$\frac{W}{r}+\frac{\partial W}{\partial n}=2\omega$$

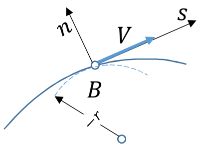
- وهذا يعني ان الجريان النسبي دوراني ولكنه غير مستقر, وبالتالي لا يملك كمون سرعة, بينما كان الجريان المطلق كمونيا ولكنه غير مستقر. لهذا فإن دراسة الجريان النسبي أكثر تعقيدا.



استخراج شرط الخلو من الدوران بالنسبة لخط التيار

شرط الخلو من الدوران

- إن الصيغة المميزة للجريانات الكمونية (اللادورانية) بأنها تملك كمون سرعة تسهل كثيرا إيجاد حلول قريبة من الواقع بالنسبة لعدد كبير من المسائل الهيدروديناميكية والايروديناميكية والغازديناميكية ذات الاهمية التطبيقية.
- وسنعالج هذه الجريانات بالتفصيل فيما بعد .
- بالمقابل فإن العديد من الظواهر التي نشاهدها في الطبيعة والمسائل التكنيكية التي تعترضنا عند تصميم الآلات والمنشآت لا يمكن تحليلها وفهمها فيزيائيا بعمق ومن ثم تطوير نظريات وطرق عملية لحسابها دون الاعتماد على الحركة الاعصارية (الدورانية) للسائل.
- فعليها بنيت نظرية الجناح الحامل, ونظرية الاضطراب التي لا تزال حتى الآن إحدى المسائل المعقدة لميكانيك السوائل الحديث .
- تتجلى أهميتها العملية من حقيقة أن كل تشكل اعصاري يؤدي لخسارة في القدرة الميكانيكية للسائل



استخراج شرط الخلو من الدوران بالنسبة لخط التيار

نهاية المحاضرة

أسئلة؟